T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN-EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

DÜZENSİZ DİZİLİŞ ALGORİTMASININ İNCELENMESİ VE PYTHON İLE UYGULAMASI

Hazırlayan

SEVİL ÖKSÜZ

20025019

Matematik Bölümünde Hazırlanan

LİSANS BİTİRME TEZİ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nuran GÜZEL

İSTANBUL, 2023

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında bana gerekli bilgiyi sağlayan, beni yönlendiren, kıymetli zamanını ayıran danışman hocam Sayın Prof. Dr. Nuran Güzel'e teşekkürlerimi sunarım.

Kasım, 2023

Sevil ÖKSÜZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$D_n, !n$	n elemanlı düzensiz diziliş sayısı

ŞEKİL LİSTESİ

ÇİZELGE LİSTESİ

ÖZET

Düzensiz diziliş, bir dizideki öğelerin sıralanmasıyla ilgili bir kavramdır. Düzensiz dizilişte, öğeler belirli bir düzen veya sıralama kurallarına tabi olmaksızın farklı kombinasyonlarda yer alır. Bu kavram genellikle matematikte ve istatistikte kullanılır. Özellikle, bir sıranın veya düzenin olmaması durumunda ortaya çıkar.

Python programlama dilinde, itertools modülündeki permutations fonksiyonu kullanılarak düzensiz dizilişleri hesaplamak mümkündür. Bu fonksiyon, bir dizi içindeki öğelerin tüm permütasyonlarını oluşturur, yani sıralamayı değiştirerek farklı kombinasyonları elde eder. Her bir kombinasyon, belirli bir düzensiz dizilişi temsil eder.

Düzensiz diziliş sayıları, dizi içindeki öğe sayısına bağlı olarak değişir. Her bir basamak için düzensiz diziliş sayısı, önceki basamaklardaki düzensiz dizilişlerle birleştirilerek elde edilir. Bu sayılar genellikle matematiksel hesaplamalarla elde edilir, ancak programlama dilleri kullanılarak daha etkili bir şekilde bulunabilir.

Özetle, düzensiz diziliş, belirli bir düzen veya sıralama olmaksızın öğelerin farklı kombinasyonlarını içeren bir kavramdır. Python gibi programlama dilleri kullanılarak bu düzensiz diziliş sayıları hesaplanabilir ve listelenebilir, bu da matematiksel hesaplamalarla uğraşmaktan daha hızlı ve kolay bir yöntem sunar.

Anahtar Kelimeler: Permütasyon, Kombinasyon, Sıralama, Algoritma

1.GİRİŞ

"Düzensiz diziliş" terimi, matematikte “derangements” kavramını ifade etmek için kullanılır. Bir kümenin elemanlarının, başlangıçta belirlenen bir düzen veya sıralama yerine farklı bir düzene yerleştirilmesi durumunda ortaya çıkan düzenlemeleri tanımlar.

Derangements kavramı, ilk olarak 1702 yılında Fransız matematikçi Pierre Raymond de Montmort tarafından ortaya atıldı. Montmort'un "Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard" (Risk Oyunları Üzerine Bir Analiz Denemesi) adlı eseri, bu konuda önemli bir dönemeçtir. Montmort, bir kart destesinin karıştırılması ve hiçbir kartın başlangıç pozisyonunda olmaması durumunu inceledi ve bu durumu "derangement" olarak adlandırdı.

Örneğin, n elemanlı bir kümenin düzensiz dizilişi, her elemanın başlangıçta belirlenen konumundan farklı bir konumda bulunduğu düzenlemelerdir. Bu terim, matematiksel problemlerin çözümünde, olasılık teorisi, kombinatorik analiz ve grup teorisi gibi alanlarda sıkça kullanılır. Düzensiz dizilişlerin temel özellikleri ve hesaplamaları, matematiksel düşünme becerilerinin geliştirilmesinde önemli bir role sahiptir. Yaygın kullanımda alt faktöriyeller için kullanılan gösterimler arasında !n, D_n, d_n, veya n_i bulunur.

2. DÜZENSİZ DİZİLİŞLERİN HESAPLANMASI

2.1 İçerme-Dışlama Prensibi

n elemanlı bir kümenin tüm düzensiz dizilişlerini açıkça listeleyerek n'in düşük değerleri için !n'i hesaplamak kolaydır, ancak n arttıkça zorlaşır:

!0 = 1 : ()
!1 = 0 :
!2 = 1 : (21)
!3 = 2 : (231), (312)
!4 = 9 : (2143), (2341), (2413), (3142), (3412), (3421), (4123), (4312), (4321)

Burada düzensiz dizilişleri sayma sorununu iki farklı şekilde ele alacağız.

Nicholas Bernoulli bu problemi Montmort ile hemen hemen aynı zamanda, içerme-dışlama prensibini kullanarak çözmüştür.

Örnek olarak bir ülkeyi düşünelim, bazı insanlar bir ilde yaşarken bazıları iki ilde, bazıları da üç farklı ilde yaşayabilir ve bu böyle devam eder. Ve varsayalım ki bu ülkedeki insan sayısını hesaplamak istiyoruz. Bunu şu şekilde yapabiliriz:

- Önce, her ildeki kişi sayısını toplayalım. Bulduğumuz sayıda fazlalık olduğunu anlayabiliriz. Çünkü bir grup insan iki ya da daha fazla ilde yaşayabilir ve biz onları birden fazla saydık.

- İkinci olarak her bir il çifti için, her ikisinde de yaşayan kişi sayısını bulalım. Sonra bunu daha önce yaptığınız fazla tahminden çıkaralım. Şimdi elimizde eksik bir tahmin var, çünkü bir grup insan üç veya daha fazla ilde yaşıyor ve biz onları birden fazla kez çıkardık.

- Ardından, her bir üçlü il için, üçünde de yaşayan kişi sayısını bulalım. Sonra bunu daha önce sahip olduğunuz düşük tahmine ekleyelim. Şimdi fazla bir tahmininiz var, çünkü bir grup insan dört veya daha fazla ilde yaşıyor ve biz onları birden fazla kez geri ekledik.

Ve böyle devam eder.

Eğer sadece sonlu sayıda il varsa, eninde sonunda doğru cevaba ulaşırız! Kısacası, ayrık olmayan $\{A_1, A_2, .., A_n\}$ kümelerinin birleşiminin kardinalitesi şu şekilde verilir

$$|\bigcup_i A_i| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

Bunun hemen bir sonucu olarak, eğer X bir küme ve $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ise X'in ayrık alt kümelerin toplamı olarak alırsak

$$|X - \bigcup_i A_i| = |X| - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

yazılabilir.

Şimdi X, n elemanlı kümenin tüm permütasyonlar kümesi olsun ve $A_i\ (1 \leq i \leq n)$'nin de i. elemanı kendine eşleyen tüm permütasyonları içerdiğini kabul edelim. Bu durumda $|X - \bigcup_i A_i| = !n$ olur. Çünkü tüm permütasyonlar kümesinden kendine eşlenen permütasyonlar çıkarılırsa düzensiz dizilişlerin eleman sayısına ulaşırız. Yani

$$!n = n! - \sum_i |A_i| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \qquad (1)$$

elde ederiz.

Örnek olarak $n = 4$ alalım.

Bu durumda A_1 kümesinde 1, 1 ile eşlenir. Yani

$A_1 = \{(1)(234), (1)(243), (1)(2)(34), (1)(3)(24), (1)(4)(23), (1)(2)(3)(4)\}$

Benzer şekilde,

$A_2 = \{(2)(134), (2)(143), (2)(1)(34), (2)(3)(14), (2)(4)(13), (1)(2)(3)(4)\}$

$A_3 = \{(3)(124), (3)(142), (3)(1)(24), (3)(2)(14), (3)(4)(12), (1)(2)(3)(4)\}$

$A_4 = \{(4)(123), (4)(132), (4)(1)(23), (4)(2)(13), (4)(3)(12), (1)(2)(3)(4)\}$

yazılır.

Buradan,

$$\sum_{1}^{4} |A_i| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| = 24$$

$$\sum_{i<j}^{4} |A_i \cap A_j| = |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|$$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$$

$$\sum_{i<j<k}^{4} |A_i \cap A_j \cap A_k| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\sum_{i<j<k<l}^{4} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 1$$

elde ederiz. Daha sonra bulunan formülde

$$!n = n! - \sum_{i}^{n} |A_i| + \sum_{i<j}^{n} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

yerine koyulursa

$$!4 = 4! - \sum_{i}^{4} |A_i| + \sum_{i<j}^{4} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k}^{4} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \sum_{i<j<k<l}^{4} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l|$$

$$!4 = 4! - 24 + 12 - 4 + 1$$

$$!4 = 9$$

buluruz. Sonuç olarak $n = 4$ için düzensiz diziliş sayısı 9'dur.

Teorem 2.1.1

$$!n = n! + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i . \binom{n}{i} . (n-i)! \ [3] \tag{2}$$

İspat: İçerme-Dışlama prensibinden (2.1) eşitliğini kullanarak bu teoremi ispatlayabiliriz.

$$!n = n! - \sum_{i}^{n} |A_i| + \sum_{i<j}^{n} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

$\sum_i^n |A_i|$ toplamını ele alalım. A_i kümesinde i, yalnızca i ile eşleneceğinden geriye kalan $(n-1)$ sayı $(n-1)!$ şekilde?? eşlenebilir. Buradan, herhangi i için A_i kümesinin kardinalitesi $(n-1)!$ bulunur. Aynı zamanda n elemandan seçilebilecek farklı i sayısı da $\binom{n}{1}$ ile hesaplanır. Yani i'nin n'e kadar tüm farklı değerleri için $|A_i|$ değeri $\binom{n}{1}. (n-1)!$ İle bulunur.

Benzer şekilde,

$\sum_{i<j}^n |A_i \cap A_j|$ toplamında i, yalnızca i ile ; j, yalnızca j ile eşlenecektir. Bu durumda geriye kalan sayılar $(n-2)!$ kadar eşlenebilir. Aynı zamanda n elemandan seçilebilecek farklı i ve j $(i<j)$ sayısı da $\binom{n}{2}$ ile hesaplanır. Yani i ve j'nin n'e kadar tüm farklı değerleri için $|A_i \cap A_j|$ değeri $\binom{n}{2}. (n-2)!$ ile bulunur.

Böyle devam edilirse

$$!n = n! - \binom{n}{1} . (n-1)! + \binom{n}{2} . (n-2)! - \binom{n}{3} . (n-3)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} (n-n)!$$

Kısacası

$$!n = n! + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i . \binom{n}{i} . (n-i)!$$

elde edilir.

Teorem 2.1.2

$$!n = n!\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \tag{3}$$

İspat: (2.2) denklemini daha açık bir şekilde yazarsak

$$!n = n! - \binom{n}{1}.(n-1)! + \binom{n}{2}.(n-2)! - \binom{n}{3}.(n-3)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!$$

$$= \frac{n!}{0!} - \frac{n}{1!}.(n-1)! + \frac{n.(n-1)}{2!}.(n-2)! - \frac{n.(n-1).(n-2)}{3!}.(n-3)! + \cdots$$

$$+ (-1)^n \frac{n.(n-1)\cdots(1)}{n!}.0!$$

$n!$ parantezine alalım böylece

$$!n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

Kısacası

$$!n = n!\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

elde edilir. [3]

Bu teorem ile $n = 5$ için düzensiz diziliş sayısı

$$D_5 = 5!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$$

$$= 120(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120})$$

$$= 44$$

Benzer şekilde,

$$D_6 = 6!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right)$$

$$= 265$$

$$D_7 = 1854$$

$$D_8 = 14.833$$

bulunur.

2.2 Tekrar Eden İlişki

Teorem 2.2.1

$D_n = (D_{n-1} + D_{n-2}).(n-1)$

İspat: Bu ispatı yapmak için (2.3) eşitliğinden yararlanabiliriz.

$$D_{n-1} = (n-1)!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!}$$

$$D_{n-2} = (n-2)!\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{i!}$$

yerine yazılırsa

$$(D_{n-1} + D_{n-2}).(n-1) = \left[(n-1)!\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i!} + (n-2)!\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{i!}\right].(n-1)$$

$$= \left[(n-1)!\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + (n-1)!\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{i!} + (n-2)!\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{i!}\right].(n-1)$$

$$= \left[(-1)^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{i!}.\big((n-1)! + (n-2)!\big)\right].(n-1)$$

$$= \left[(-1)^{n-1}.(n-1) + \sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{i!}.\big((n-2)!\,(n).(n-1)\big)\right]$$

$$= \left[(-1)^{n-1}.n + (-1)^{n-1}.(-1)^1) + n!\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{i!}\right]$$

$$= \left[\frac{(-1)^{n-1}.n.(n-1)!}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n.n!}{n!} + n!\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{i!}.\right]$$

$$= \left[\frac{(-1)^{n-1}.n!}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n.n!}{n!} + n!\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{i!}.\right]$$

$$= \left[n!\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{i=0}^{n-2}\frac{(-1)^i}{i!}\right)\right]$$

$$= \left[n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\right] = D_n$$

eşitliği gösterilir. [1]

$D_1 \rightarrow 0$

$D_2 \rightarrow 1$

$D_3 \rightarrow (1 + 0).2 = 2$

$D_4 \rightarrow (2 + 1).3 = 9$

$D_5 \rightarrow (9 + 2).4 = 44$

$D_6 \rightarrow (44 + 9).5 = 265$

$D_7 \rightarrow (265 + 44).6 = 1854$

$D_8 \rightarrow (1854 + 265).7 = 14.833$

$D_9 \rightarrow (14833 + 1854).8 = 133.496$

$\vdots$

$D_n \rightarrow (D_{n-1} + D_{n-2}).(n-1) \quad , \quad n \geq 2$

bulunur.

2.3 Alt-Düzensiz Dizilişler

Tanım 2.3.1

$D(N,k)$; N elemanlı küme üzerindeki permütasyonların sayısını göstersin, böylece N eleman arasındaki ilk k elemandan hiçbiri başlangıç konumuna dönmediği durumları gösterir. Başka bir deyişle, bu permütasyonlarda ilk k $(0 \leq k \leq N)$ eleman, orijinal konumunda olmamalıdır.

Bu tanımla beraber,

Her nesnenin başlangıç konumuna dönebildiği durum yani

1. $D(N,0) = N!$

ve

hiçbir nesnenin başlangıç konumuna dönmediği durum

2. $D(N,N) = D_N$

eşitlikleri ile ifade edilir

$D(N,k)$ sayılarını bulmanın kolay bir yolu vardır. $D(N,k)$ sayıları için fark tablosu çizmemiz yeterlidir.

Faktöriyel dizisi: 0! ,1! ,2! ,3! ,4! ,5!, …

1 1 2 6 24 120 720 ...

0 1 4 18 96 600 ...

1 3 14 78 504 ...

2 11 64 426 ...

9 53 362 ...

...

Şekil 2.1. Fark Tablosu [4]

Teorem 2.3.1

$D(N,k)$ sayıları $\{n!\}$ için fark tablosunun k. satırının değerleridir. İlk satır "sıfırıncı" satır olarak kabul edilir. [5]

Böylece fark tablosundan;

1.Satır	2.Satır	3.Satır	4.Satır
$D(1,1) = 0$	$D(2,2) = 1$	$D(3,3) = 2$	$D(4,4) = 9$
$D(2,1) = 1$	$D(3,2) = 3$	$D(4,3) = 11$	$D(5,4) = 53$
$D(3,1) = 4$	$D(4,2) = 14$	$D(5,3) = 64$	$D(6,4) = 362$
$D(4,1) = 18$	$D(5,2) = 78$	$D(6,3) = 426$	$\vdots$
$D(5,1) = 96$	$D(6,2) = 504$	$\vdots$	
$D(6,1) = 600$	$\vdots$		
$\vdots$			

k. satır için

$D(k,k), D(k+1,k), D(k+2,k), D(k+3,k), D(k+4,k), \ldots$

yazılır.

Dikkat edilirse öndeki köşegenin 1,0,1,2,9, ... değerleri düzensiz diziliş sayılarına eşittir.

$!1 = D(1,1) = 0$

$!2 = D(2,2) = 1$

$!3 = D(3,3) = 2$

$!4 = D(4,4) = 9$

$!5 = D(5,5) = 44$

$\vdots$

3. DÜZENSİZ DİZİLİŞLERİN EULER SAYISI İLE İLİŞKİSİ

Teorem 3.1

N eleman sayısı büyüdükçe $\frac{n!}{D_n}$ oranı e sayısına yakınsar. Yani $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{D_n} = e$ ‘dir.

İspat: $D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$ olduğunu ispatlamıştık. Buradan $\frac{n!}{D_n} = \frac{n!}{n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}}$ elde edilir.

Taylor serisinden yararlanarak $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ eşitliğinin yazılacağını biliyoruz. Bu eşitlikte $x = -1$ alınırsa

$$e^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$$

Yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{D_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}} = \frac{1}{e^{-1}} = e$$

elde edilir.

Çizelge 2.1

	A	B	C	D
n	Permütasyon ($n!$)	düzensiz diziliş ($!n$)	$A \div B$	$B \div A$
2	2	1	2.00000000000000	0.500000000000000
3	6	2	3.00000000000000	0.333333333333333
4	24	9	2.66666666666667	0.375000000000000
5	120	44	2.72727272727273	0.366666666666667
6	720	265	2.71698113207547	0.368055555555556
7	5040	1854	2.71844660194175	0.367857142857143
8	40,320	14.833	2.71826333176026	0.367881944444444
9	362.880	133.496	2.71828369389345	0.367879188712522
10	3.628 800	1.334.961	2.71828165766640	0.367879464285714
11	39.916.800	14.684.570	2.71828184277783	0.367879439233606
12	479.001.600	176.214,841	2.71828182735187	0.367879441321282
13	6.227.020.800	2.290.792.932	2.71828182853849	0.367879441160691
14	87.178.291.200	32.071.101.049	2.71828182845373	0.367879441172162
15	1.307.674 368.000	481.066.515.734	2.71828182845938	0.367879441171397
16	20.922.789.888.000	7,697,064,251,745	2.71828182845903	0.367879441171445
17	355 687 428. 096.000	130.850.092.279.664	2.71828182845905	0.367879441171442
18	6.402.373.705.728.000	2.355 301.661.033.950	2.71828182845904	0.367879441171417

4. Düzensiz Dizilişlerin Python ile Yazımı

Düzensiz dizilişlerin sayıları genellikle matematikte veya istatistikte kullanılan bir konsepttir. Bu sayılar, belirli bir düzeni veya düzeni olmayan bir dizi içindeki öğelerin sıralanmasıyla ilgilidir. Bu tür dizilişlerin sayılarını hesaplamak için farklı matematiksel yöntemler bulunsa da bu sayıları elle yazmak genellikle karmaşık ve zaman alıcı bir süreç olabilir. Bu nedenle, programlama dilleri kullanılarak bu sayıları hesaplamak ve yazdırmak daha etkili bir yöntem olabilir.
Python programlama dilini kullanarak düzensiz diziliş sayılarını hesaplamak için bir örnek program şu şekilde olabilir:

```
from itertools import permutations

def is_derangement(arrangement):
  for i in range(len(arrangement)):
    if arrangement[i] == i + 1:
      return False
  return True

for n in range(1, 7):
  count = 0
  numbers = list(range(1, n + 1))
  derangements = []
  print("n = ", n, "için")
  print(-------------------)

  for arrangement in permutations(numbers):
    if is_derangement(arrangement):
      derangements.append(int(''.join(map(str, arrangement))))
      print(* derangements, end = "\t")
      derangements = []
      count += 1
      if count % 10 == 0:
        print()
  print()
  print()
  print(n, "basamaklı düzensiz diziliş sayısı: ", count)
  print()
  print("\n")
```

Bu programın çıktısı ise:

n= 1 için
----

1 basamaklı düzensiz diziliş sayısı: 0

n= 2 için

21

2 basamaklı düzensiz diziliş sayısı: 1

n= 3 için
----
231 312

3 basamaklı düzensiz diziliş sayısı: 2

n= 4 için

2143 2341 2413 3142 3412 3421 4123 4312 4321

4 basamaklı düzensiz diziliş sayısı: 9

n= 5 için

21453 21534 23154 23451 23514 24153 24513 24531 25134 25413
25431 31254 31452 31524 34152 34251 34512 34521 35124 35214
35412 35421 41253 41523 41532 43152 43251 43512 43521 45123
45132 45213 45231 51234 51423 51432 53124 53214 53412 53421
54123 54132 54213 54231

5 basamaklı düzensiz diziliş sayısı: 44

n= 6 için

\-------------------

214365	214563	214635	215364	215634	215643	216345	216534	216543	231564
231645	234165	234561	234615	235164	235614	235641	236145	236514	236541
241365	241563	241635	245163	245361	245613	245631	246135	246315	246513
246531	251364	251634	251643	254163	254361	254613	254631	256134	256143
256314	256341	261345	261534	261543	264135	264315	264513	264531	265134
265143	265314	265341	312564	312645	314265	314562	314625	315264	315624
315642	316245	316524	316542	341265	341562	341625	342165	342561	342615
345162	345261	345612	345621	346125	346215	346512	346521	351264	351624
351642	352164	352614	352641	354162	354261	354612	354621	356124	356142
356214	356241	361245	361524	361542	362145	362514	362541	364125	364215
364512	364521	365124	365142	365214	365241	412365	412563	412635	415263
415362	415623	415632	416235	416325	416523	416532	431265	431562	431625
432165	432561	432615	435162	435261	435612	435621	436125	436215	436512
436521	451263	451362	451623	451632	452163	452361	452613	452631	456123
456132	456213	456231	456312	456321	461235	461325	461523	461532	462135
462315	462513	462531	465123	465132	465213	465231	465312	465321	512364
512634	512643	514263	514362	514623	514632	516234	516243	516324	516342
531264	531624	531642	532164	532614	532641	534162	534261	534612	534621
536124	536142	536214	536241	541263	541362	541623	541632	542163	542361
542613	542631	546123	546132	546213	546231	546312	546321	561234	561243
561324	561342	562134	562143	562314	562341	564123	564132	564213	564231
564312	564321	612345	612534	612543	614235	614325	614523	614532	615234
615243	615324	615342	631245	631524	631542	632145	632514	632541	634125
634215	634512	634521	635124	635142	635214	635241	641235	641325	641523
641532	642135	642315	642513	642531	645123	645132	645213	645231	645312
645321	651234	651243	651324	651342	652134	652143	652314	652341	654123
654132	654213	654231	654312	654321					

6 basamaklı düzensiz diziliş sayısı: 265

olur ve bu şekilde devam eder.

5. Düzensiz Dizilişlerin Uygulamaları

Bu bölümde derangements kavramıyla ilgili sorular ve derangements kavramına dönüştürülerek çözülebilen soru örnekleri verilecektir.

Soru 1: Bir arkadaş grubu, 6 farklı kitaptan oluşan bir hediye seti hazırlamak istiyor. Ancak her arkadaş, kendi favori kitabını içeren hediye setini alamaz. Bu durumda, arkadaşlar hediye setlerini kaç farklı şekilde oluşturabilirler?

Çözüm: Bu soruyu çözmek için düzensiz diziliş (derangements) sayılarını kullanabiliriz. Toplam düzenleme sayısı $6!$ olacaktır. Ancak her arkadaşın kendi favori kitabını içeren hediye setini alamaması durumu derangements sayıları ile ifade edilir. Derangement sayısını $!\,n$ ile gösterdiğimize göre, her arkadaşın kendi favori kitabını içeren hediye setini alamaması durumu için şu formülü kullanabiliriz:

$$!\,6 = 6!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right)$$

Bu formülü çözerek arkadaşların hediye setlerini kaç farklı şekilde oluşturabileceklerini bulabiliriz. Şimdi bu formülü uygulayarak sonucu hesaplayalım:

$$!\,6 = 720\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right)$$
$$= 265$$

Bu nedenle, arkadaşlar 6 farklı kitaptan oluşan hediye setlerini 265 farklı şekilde oluşturabilirler.

Soru 2: Toplantı için bir şirkete gelen 4 kişi resepsiyona kimliklerini bırakıyorlar. Toplantı sonrasında kimlikleri isim ve fotoğrafları kontrol etmeden rastgele iade eden görevli, kimlikleri 4 kişi de kendisine ait olmayan bir kimlik alacak şekilde kaç farklı şekilde iade edebilir?

Çözüm: 4 kimlik 4 kişiye $4! = 24$ farklı şekilde iade edilebilir. Düzensiz diziliş formülünü bu 4 elemanlı duruma uyguladığımızda bu durumlardan 9'unda tüm kimliklerin yanlış kişilere iade edildiğini buluruz.

Soru 3: Acelesi olduğu için 5 farklı daireye ait 5 elektrik faturasını posta kutularına adresleri kontrol etmeden (her posta kutusunda tek bir fatura olacak şekilde) rastgele atan bir postacı, bu işlemi hiçbir fatura doğru posta kutusuna atılmayacak şekilde kaç farklı şekilde yapabilir?

Çözüm: 5 fatura 5 posta kutusuna 5!=120 farklı şekilde atılabilir. Düzensiz diziliş formülünü bu 5 elemanlı duruma uyguladığımızda bu durumlardan 44'ünde hiçbir faturanın doğru posta kutusuna atılmadığını buluruz.

$$D_5 = 5!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$$
$$= 120(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120})$$
$$= 44$$

Soru 4: Bir postacı 7 dairelik bir apartmanda 7 elektrik faturasını posta kutularına üçünü doğru, dördünü hatalı olacak olacak şekilde kaç farklı şekilde atabilir?

Çözüm: 7 posta kutusu içinden faturaların doğru atılacağı 3 posta kutusu $C(7,3)$ farklı şekilde seçilebilir. Faturaların hatalı atılacağı diğer 4 posta kutusundaki düzensiz diziliş sayısı $!4$ olur. Buna göre postacı faturaların üçünü doğru, dördünü hatalı olacak şekilde posta kutularına $C(7,3) \cdot !4 = 35 \cdot 9 = 315$ farklı şekilde atabilir.

Soru 5: $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesi üzerinde, her x için $f(x) - x \neq 0$ olacak şekilde birebir ve örten bir $f(x)$ fonksiyonu tanımlanmak istenmektedir. Bu koşulu sağlayan kaç farklı $f(x)$ fonksiyonu vardır?

Çözüm: Bu durumu sağlayan farklı fonksiyon sayısı $!7$ olacaktır. Yani, $X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesi üzerinde, her x için $f(x) - x \neq 0$ olacak şekilde birebir ve örten bir $f(x)$ fonksiyonu tanımlamak istendiğinde, 1854 farklı $f(x)$ fonksiyonu vardır.

SONUÇLAR

Bu çalışma, derangements (düzensiz dizilişler) kavramını ele alarak matematiksel özelliklerini, hesaplamalarını ve uygulamalarını inceledi. Python programlaması kullanılarak gerçekleştirilen hesaplamalar, derangements problemlerinin çeşitli boyutlarda nasıl çözülebileceğini gösterdi.

İlk olarak, n elemanlı bir kümenin derangements sayısını hesaplamak için kullanılan temel formülasyonlar incelendi. Matematikte yaygın olarak kullanılan $!n$ veya D_n gösterimleriyle ifade edilen derangements sayıları, bir kümenin elemanlarının belirli bir düzen içinde olmama durumunu temsil eder.

Python programlaması ile gerçekleştirilen hesaplamalar, derangements sayılarının etkileyici bir hızda arttığını ve bu sayıları hesaplamak için faktöriyel fonksiyonlarına dayalı formüllerin kullanışlı olduğunu gösterdi. Ayrıca, derangements sayılarının özellikle kombinatorik analiz ve olasılık teorisi problemlerinde nasıl kullanılabileceği örneklerle gösterildi.

Bu çalışma, derangements kavramının matematiksel düşünme becerilerini geliştirmek ve kombinatorik problemlere yaklaşımı anlamak için önemli bir kaynak sağlamaktadır. Gelecekteki araştırmalarda, derangements kavramının daha geniş bir matematiksel çerçevede nasıl kullanılabileceği ve bu konudaki daha derinlemesine analizlere odaklanılması önerilmektedir.

KAYNAKÇA

[1]Brualdi, R. , "Introductory Combinatorics", 5. Baskı,Pearson ,2009

[2]Hassani, M. ,"Derangements and Applications", Journal of Integer Sequences, Cilt 6, 2003

[3] https://math.ucr.edu/home/baez/qg-winter2004/

[4] https://www.math.emory.edu/~rg/derangements.pdf

[5] https://github.com/justanotherparadox/Combinatorics/blob/master/derangements-essay2.pdf

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı: Sevil ÖKSÜZ

İletişim:

Eğitim Bilgileri

Lise: Özel Darüşşafaka Lisesi 2016-2020

Lisans: Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü